数理解析研究所講究録
552巻 1985年 79-85

translation の flow equivalence

九大理 藤原雅子 (Masako Fujiwara)
九大教養 浜地敏弘 (Toshihiro Hamachi)
〃 押川元重 (Motosige Osikawa)

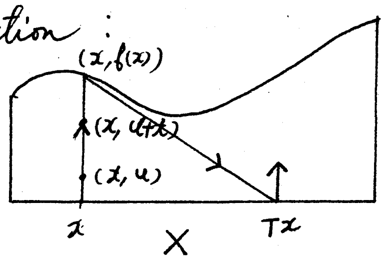
§0、序

homeomorphisms の同値関係で、conjugacy より弱い概念である flow equivalence に関して、W. Parry - D. Sullivan [5] Franks [2] は、topological Markov shift のクラスについて flow equivalence の不変量を決定し、Cuntz - Krieger [1] は、それらが C^*環 O_A の stable isomorphism の不変量であることを示した。

さて1次元トーラスの離散可算位相群 Γ の character group $\Gamma^\wedge$上の translation と、$C(\Gamma^\wedge)$ の C^*接合積 $\mathfrak{A}_\Gamma$ について、例えば1次元 irrational rotation algebra の時、Rieffel [8] は、stable isomorphism である為の判定条件を与え、河村-竹本 [4] は、ある種々のタイプの Γ の時の $\mathfrak{A}_\Gamma$ の stable isomorphism の不変量を得ている。ところが translation のクラスの flow equivalence に関して、以下に述べるように一般的な不変量が若者達によって得られたので、Cuntz-Krieger の場合がそうであったように、これが一般の $\mathcal{O}_\Gamma$ の stable isomorphism の不変量になるだろうと予想される。

§1. translation の flow equivalence

X を compact metric space, T をその上の homeomorphism, $f(x)$ を positive continuous function とする。$X \times R$ の直積位相を $(X, f) = \{(x, u)\,;\ x \in X,\ 0 \leq u \leq f(x)\}$, (但し、$(x, f(x))$ と $(Tx, 0)$ を同一視する) に制限することにより、(X, f) は compact metric space になる。$(T, f)_{t \in R}$ を flow built under function:



$$(T, f)_t\,(x, u) = (x,\ u+t) \in (X, f)$$

$$\text{for } (x, u) \in (X, f).$$

とする。

定義 1. homeomorphisms T (on X), S (on Y) が flow equivalent であるとは、flows (T, f) と (S, g) が topologically conjugate になるような positive continuous functions f, g がとれること。これは、同値関係をみたす。

Γを1次元トーラス$S^1=\{z\,;\,|z|=1\}$の countable discrete subgroups, $\Gamma^\wedge$をその character group とする。character $\chi_\Gamma\in\Gamma^\wedge$を次で定める: $\chi_\Gamma(\sigma)=\sigma \quad \sigma\in\Gamma$。

<u>定義2.</u> homeomorphism $\Gamma^\wedge\ni\chi\longrightarrow\chi\cdot\chi_\Gamma\in\Gamma^\wedge$ を compact abelian group $\Gamma^\wedge$ の translation といい、R_Γ で表わす。

<u>定理.</u> S^1の countable discrete subgroup $\Gamma_i \quad i=1,2$ に対して、translations R_{Γ_1} と R_{Γ_2} が flow equivalent である為の必要十分条件は、次をみたす $c>0$ が存在すること:

$$\Gamma_1^\uparrow = c\times\Gamma_2^\uparrow$$

但し、$\Gamma_j^\uparrow=\{u\in R\,;\ e^{2\pi iu}\in\Gamma_j\} \quad j=1,2.$

証明は準備中の論文[3]に譲ることにして、この定理をいくつかの translations の例に適用して、不変量を示すことにする。

§2. 例

<u>例1.</u> (n次元 irrational rotation).

$1,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ は有理数体上一次独立とする。

$\Gamma=\{\exp(2\pi i\sum_{j=1}^{n}m_j\lambda_j)\,;\ m_j\in\mathbb{Z}\ \ 1\le j\le n\}$ から決まる translation

R_Γ は、n 次元 irration rotation $R_{(\lambda_1,\cdots\lambda_n)}$; $(x_1\cdots x_n)\longrightarrow$ $(x_1+\lambda_1 (\mathrm{mod}\,1), \cdots, x_n+\lambda_n (\mathrm{mod}\,1))$, $0\leqq x_i\leqq 1$ (但し 0 と 1 は同一視) と topological conjugate である。定理を適用すると、irrational rotations $R_{(\lambda_1,\cdots\lambda_n)}$ と $R_{(\mu_1,\cdots\mu_n)}$ が flow equivalent である為の必要十分条件は、次をみたす行列 $A\in SL(n+1,\mathbb{Z})$ が存在すること;

$$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n,1)=(\mu_1,\cdots,\mu_n,1)A$$

<u>例2.</u> (adding machine 変換).

$r=(r_n)_{n\geqq 1}$ を 2 以上の整数の列とする。

$\Gamma=\{\exp(2\pi i\times\frac{k}{r_n\cdots r_1})\ ;\ k\in\mathbb{Z},\ n\geqq 1\}$,

$X_r=\prod_{n=1}^{\infty}\{0,1,\cdots,r_n-1\}$.

X_r は離散位相の直積位相の下で compact metric space になり、群の演算を座標毎の和で、但し右へ繰り上がることにすると、X_r は位相群になる。

Γ から定まる translation R_Γ は、X_r の上の homeomorphism

T_r ; $X_r\ni(x_n)_{n\geqq 1}\longrightarrow(x_n)_{n\geqq 1}+(1,0,0,\cdots)\in X_r$

と topologically conjugate になる。T_r は adding machine transformation と言われる。今 p_i を i 番目 $(i\geqq 1)$ の素数とし、n 毎に r_n を p_i の巾乗で割った時の最大の巾乗を $p_i^{g_n}$、そして $k(r)_i=\sum_{n=1}^{\infty}g_n$ (但し ∞ の値も許す) とおく。

定理を適用すると、adding machine 変換 T_r と T_s ($r=(r_n)_{n\geq1}$, $s=(s_n)_{n\geq1}$) が flow equivalent である為の必要十分条件は、

$$\#\{i\geq1 ;\ k(r)_i \neq k(s)_i,\ k(r)_i<\infty,\ k(s)_i<\infty\} < \infty$$

かつ

$$\{i\geq1 ;\ k(r)_i=\infty\} = \{i\geq1 ;\ k(s)_i=\infty\}.$$

例3 (Solenoidal 変換)

$\lambda>0$ を無理数, $r=(r_n)_{n\geq1}$ を2以上の整数の列とする。

$$\Gamma=\{\exp(2\pi i\times\frac{k\lambda}{r_n\cdots r_1}) ;\ k\in\mathbb{Z},\ n\geq1\}$$

$$X_{\lambda,r}=\{(x_n)_{n\geq0} ;\ 0\leq x_n\leq1\ (\text{但し } 0 \text{ と } 1 \text{ は同一視する})\ \text{for } n\geq0,$$
$$x_{n-1}=r_nx_n\ (\mathrm{mod}\ 1)\quad n\geq1\}.$$

$X_{\lambda,r}$ は無限次元トーラスの closed subgroup であるが、Γ から定まる translation R_Γ は、$X_{\lambda,r}$ 上の homeomorphism $S_{\lambda,r}$;

$$X_{\lambda,r}\ni(x_n)_{n\geq0}\longrightarrow(x_n)_{n\geq0}+(\lambda,\frac{\lambda}{r_1},\frac{\lambda}{r_1r_2},\cdots,\frac{\lambda}{r_1\cdots r_n},\cdots)\in X_{\lambda,r}$$

と topologically conjugate である。$S_{\lambda,r}$ は solenoidal 変換と言われる。定理を適用すると、Solenoidal 変換 $S_{\lambda,r}$ ($r=(r_n)_{n\geq1}$) と $S_{\mu,u}$ ($u=(u_n)_{n\geq1}$) が flow equivalent である為の必要十分条件は、数列 $(r_i)_{i\geq1}$ のある有限個の要素 $k_1,\cdots,k_n$ と数列 $(u_i)_{i\geq1}$ のある有限個の要素 $l_1,\cdots,l_m$ と $M\in\mathbb{Z}$, $j\in\mathbb{N}$ が存在して次の条件 (1) (2) をみたすことである;

(1) $$\mu = \pm \frac{l_1 \cdots l_m}{k_1 \cdots k_n} \times \frac{\lambda}{1 + \frac{M\lambda}{r_1 \cdots r_j}}$$

(2) $\{r_1, r_2, \cdots\} \setminus \{k_1, \cdots, k_n\} = \{u_1, u_2, \cdots\} \setminus \{l_1, \cdots, l_m\}$

かつ、数列 $(r_i)_{i \geq 1}$ の中に無限回現われる数は、$(u_i)_{i \geq 1}$ の中にも無限回現われ、逆も成り立つ。

問題1. X を compact metric space, T をその上の homeomorphism $f(x)$ を positive continuous function, $(T, f)_{t \in R}$ をその flow built under function とする。

$C((X, f))$ と flow $(T, f)_{t \in R}$ による連続 C^*-接合積は、$C(X)$ と homeomorphism T による C^*-接合積 $\otimes K$ と C^* 同型か。但し K はある可算次元 Hilbert space 上の compact operators の全体。

問題2. Γ_i $(i=1,2)$ を S^1 の countable discrete subgroups とする。$C(\Gamma_i^\wedge)$ と translation R_{Γ_i} による C^*-接合積 $\mathfrak{A}_{\Gamma_i}$ 同志が stable isomorphism である為の必要十分条件は、

$$\Gamma_1^\wedge = c \times \Gamma_2^\wedge \quad \text{for some } c > 0$$

か。注、$\mathfrak{A}_{\Gamma_i}$ 同志が C^*-同型である為の必要十分条件は、$\Gamma_1^\wedge = \Gamma_2^\wedge$ であることが知られている [4][6][7][8].

文献

[1] J. Cuntz and W. Krieger, A class of C^*-algebras and topological Markov chains, Invent. Math., 56 (1980), 251–268

[2] J. Franks, Flow equivalence of subshifts of finite type. preprint

[3] M. Fujiwara – T. Hamachi – M. Osikawa, Flow equivalence of translations on compact abelian groups (準備中)

[4] 河村 – 竹本, Shift力学系に対する C^*-環の間の stable 同型, 数理研講究録 (488) 43–58.

[5] W. Parry – D. Sullivan, A topological invariant for flows on one-dimensional spaces, Topology, 14 (1975), 297–299

[6] M. Pimsner – D. Voiculescu, Imbedding the irrational rotation C^*-algebra into an AF-algebra, J. Operator Theory, 4 (1980), 201–210.

[7] N. Riedel, Classification of the C^*-algebras associated with minimal rotations, Pacific J. Math., 101 (1982) 153–162.

[8] M. Rieffel, C^*-algebras associated with irrational rotations, Pacific J. Math., 93 (1981), 415–429